

# La Recherche Opérationnelle

Franck JEANNOT

2004

Copyright ©2004 Franck JEANNOT.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, with no Front-Cover Texts, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled « GNU Free Documentation License ».

Permission vous est donnée de copier, distribuer et modifier ce document selon les termes de la licence GNU pour les documentations libres, version 1.2 ou toute autre version ultérieure publiée par la Free Software Foundation. Sans sections invariables ; sans texte de première de couverture. Une copie de cette licence est incluse dans l'annexe intitulée « GNU Free Documentation License ». Vous trouverez également une traduction non officielle de cette licence dans l'annexe intitulée « Licence de documentation libre GNU ».

Distribution L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X : MikT<sub>E</sub>X

# Chapitre 1

## Définitions et historique

### 1.1 Définitions

« Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum. » Leonhard Euler

Le terme de recherche opérationnelle est un concept général regroupant les domaines scientifiques de l'optimisation<sup>1</sup>. Il s'agit de « l'analyse scientifique des phénomènes d'organisation » [01].

La recherche opérationnelle est « une méthode d'analyse scientifique du problème posé, méthode particulièrement tournée vers la recherche de la meilleure façon d'appréhender les faits, et de prendre des décisions susceptibles de déboucher sur de meilleurs résultats » [04].

Ainsi, la recherche opérationnelle propose « un recueil de méthodes et d'algorithmes susceptibles de pallier l'insuffisance du bon sens pour l'analyse et l'optimisation de systèmes » [03].

### 1.2 Historique



Basée autrefois sur l'expérience et le bon sens, la résolution de certains problèmes complexes se doit de passer par une analyse scientifique et une expression numérique des faits. L'analyse de masse apportée par l'ordinateur a permis des évolutions considérables de ces méthodes et algorithmes.

Les origines de la recherche opérationnelle semblent très anciennes. En effet

---

1. le terme d'optimisation ne figure dans les dictionnaires que depuis peu de temps et pas dans tous (optimisation, optimiser sont désuets et ont d'ailleurs très peu servi) tandis que sa racine (latine) s'est imposée dans la plupart des langues (*optimization*, *optimierung*, *optimizatsia*, *optimización*, etc.)

**Plutarque**<sup>2</sup> signalait, à propos du siège de Syracuse par les Romains, que **Hiéron**<sup>3</sup> demandait à **Archimède**<sup>4</sup> : « de révoquer un petit la géométrie de la spéculation des choses intellectives à l'action des corporelles et sensibles, et faire que la raison démonstrative fut un peu plus évidente et facile à comprendre au commun peuple, en la meslant par expérience matérielle à l'utilité de l'usage » (*Vies des hommes illustres*, trad. Jacques AMYOT, 1559).

Ainsi découvrait-on déjà, en quelque sorte, trois siècles avant notre ère, l'utilité d'une recherche *opérationnelle*.

Dès le XVII<sup>e</sup> siècle, en France en particulier, les grands géomètres Blaise **Pascal**<sup>5</sup> et Pierre de **Fermat**<sup>6</sup> s'intéressent au comportement face au hasard.

De même, le *calcul des variations* est né il y a plus de trois cents ans (problème de la courbe brachystochrone<sup>7</sup> posé en 1696 par Johan Bernoulli). Plus tard, Jacob Jacques **Bernoulli**<sup>8</sup> évoque dans son **Ars conjectandi**, publié à titre posthume en 1713, *la théorie des décisions*<sup>9</sup>.

Vers la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, Gaspard **Monge**<sup>10</sup> se signale comme un précurseur des méthodes modernes d'analyse dans une étude systématique d'organisation de travaux, et Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat **Condorcet**<sup>11</sup>, par une investigation du suffrage universel, détermine les conséquences possibles du vote.

Au siècle dernier enfin, Antoine Augustin **Cournot**,<sup>12</sup> dans la publication de ses recherches sur les principes mathématiques de la *théorie des richesses*, met avec insistance l'accent sur les *modèles de concurrence économique*. L'importance de ces études n'est apparue que bien tardivement et il a fallu attendre la Seconde Guerre mondiale pour que, nécessité aidant, leur intérêt soit reconnu et que l'homme fasse appel aux mathématiques. En Angleterre,

---

2. philosophe (46..125)

3. le roi Hiéron II (-306..-214)

4. célèbre ingénieur Grec (-287..-212)

5. mathématicien (1623..1662)

6. mathématicien (1601..1665)

7. c'est la courbe que doit suivre un « point matériel » s'il veut descendre de A à B en le temps le plus court, c'est la courbe d'équations paramétriques :  $[x = R.(t - \sin(t)); y = R.(1 - \cos(t))]$

8. mathématicien (1654..1705)

9. théorie qui couvre le champ de l'étude mathématique des choix d'actions (stratégies) et d'inférences Statistiques en fonction de la considération de l'utilité et de la probabilité des différentes conséquences des actions possibles.

10. mathématicien (1746..1818)

11. mathématicien (1743..1794)

12. mathématicien (1801..1877)

Patrick Maynard Stuart **Blackett**<sup>13</sup> créait en 1939 le premier groupe de recherche opérationnelle chargé de l'étude des contremesures, exemple rapidement suivi par les armées.

Aux États-Unis, parallèlement, l'étude scientifique des problèmes militaires, industriels et économiques était confiée à des groupes de recherche opérationnelle.

On connaît les performances de l'étude scientifique des opérations militaires au cours de la Seconde Guerre mondiale. Rapidement mis en éveil par l'efficacité de ces nouvelles méthodes ayant permis un meilleur emploi des armes, une économie en vies humaines et un emploi judicieux des matériels, les milieux industriels se sont demandé si ces méthodes ne pouvaient pas aussi contribuer à une meilleure rentabilité des entreprises. Dans un contexte déterminé, les éléments nécessaires au calcul des décisions sont connus avec exactitude, à la précision des mesures près, éventuellement. La principale difficulté réside dans le très grand nombre de solutions possibles entre lesquelles le choix doit s'exercer pour ne retenir que la plus favorable.

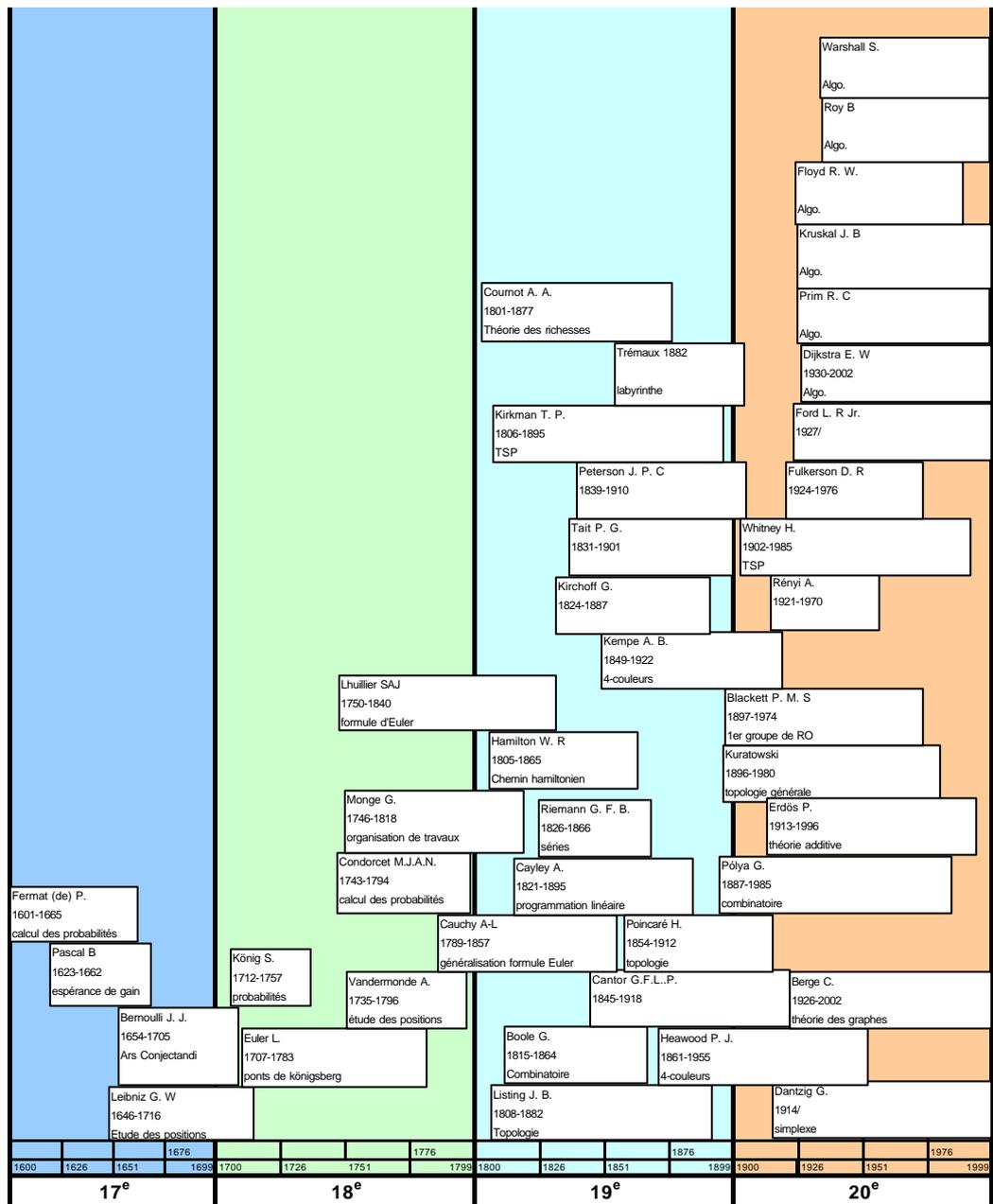
Les algorithmes de la *théorie des graphes*, les techniques de la *programmation linéaire* et de la *programmation dynamique* sont des outils facilitant la recherche de la meilleure solution sans avoir à énumérer toutes les possibilités.

Les mathématiques répertoriées sous le vocable d'*optimisation* interviennent, pour partie, dans le processus de résolution de problèmes de mathématiques appliquées, ou dans l'étude qualitative de certains problèmes de décision, comme ceux de la *commande optimale*, de l'*identification* ou de l'*ajustement de paramètres*.

---

13. physicien anglais (1897..1974)

## 1.3 Chronologie des personnages célèbres



## 1.4 Notation

Après un travail de modélisation mathématique, un problème d'optimisation met en évidence des variables d'état ou paramètres, des contraintes sur ces paramètres, et un critère à optimiser [02]. On présente donc un problème d'optimisation de la façon suivante :

Minimiser  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  sous la condition  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ , ou en version abrégée :

$$\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

La fonction  $\mathbf{f}$ , qui pour  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  associe la valeur numérique  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , est le *critère*, le *coût*, la *fonction-objectif*, la *fonction économique*, etc. (noté traditionnellement  $\mathbf{J}$  dans certains problèmes dits *variationnels*). On ne parlera pas de fonction-coût autre qu'à valeurs réelles (de manière qu'on puisse comparer sans ambiguïté les valeurs  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$ ). La partie  $\mathbf{C}$  de  $\mathbf{X}$  est l'ensemble des *contraintes* ou *ensemble-contrainte*, c'est-à-dire qu'on ne s'intéresse dans le problème d'optimisation qu'aux  $\mathbf{x}$  se trouvant dans  $\mathbf{C}$ , il est représenté de diverses manières (par des égalités ou inégalités à respecter, des bornes à ne pas dépasser, etc.). Si  $\mathbf{C}$  est l'espace  $\mathbf{X}$  tout entier, c'est-à-dire si on laisse toute liberté dans le choix de  $\mathbf{x}$ , on parlera de problème d'optimisation sans contrainte.



# Bibliographie

- [01] Richard E. Bellman. Dynamic Programming. Princeton University Press, 1957.
- [02] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. L'optimisation. Que sais-je ? Presses Universitaires de France, 1996.
- [03] Georges Cullman. Encyclopaedia Universalis. 4ème édition, Réf : 16-935 a.
- [04] Francois Ecoto. Initiation à la recherche opérationnelle. Ellipses.
- [05] Petit Robert illustré en couleur. (Édition mise à jour en Novembre 2000 - ISBN : 2-7441-0298-9).

Sources Web :

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>

<http://www.cartage.org.lb/fr/themes/Biographies/mainbiographie/B/Blackett/Blackett.htm>